

MATHEMATISCH CENTRUM

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZC 30

Ontwikkeling van gegeneraliseerde hypergeometrische
functies.

Serie voordrachten najaar 1955.

C.S.Meyer.



1955

Printed at the Mathematical Centre, 49, 2e Boerhaavestraat, Amsterdam.

The Mathematical Centre, founded the 11-th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications. It is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O), by the Municipality of Amsterdam, by the University of Amsterdam, by the Free University at Amsterdam, and by industries.

Reeks voordrachten over:

Ontwikkelingen van gegeneraliseerde
hypergeometrische functies

door

Prof. Dr. C.S. Meijer

Eerste voordracht op 10 October 1955

Is $n=0, 1, 2, \dots$, dan stelt men het product $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ ter afkorting voor door $\prod_{j=1}^n a_j$; onder $\prod_{j=1}^0 a_j$ verstaat men het getal 1.

Is h geheel ≥ 0 , dan wordt $(a)_h$ als volgt gedefinieerd:

$$(1) \quad \begin{cases} (a)_h = a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+h-1), & \text{als } h \geq 1, \\ (a)_0 = 1. \end{cases}$$

Uit deze definitie volgt $(1)_h = h!$; verder volgt uit deze definitie ook

$$(2) \quad (-n)_h = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots; h=n+1, n+2, n+3, \dots).$$

Is $\Re(z) > 0$, dan wordt de gammafunctie $\Gamma(z)$ gedefinieerd door

$$(3) \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

Uit deze definitie volgt

$$(4) \quad \Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

De door (3) gedefinieerde functie $\Gamma(z)$ is een continue functie van z , die voor geen enkele waarde van z gelijk aan 0 wordt.

Betrekking (4) schrijven we in de vorm

$$(5) \quad \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

Het rechterlid van deze betrekking heeft ook betekenis als

$$(6) \quad \Re(z) \leq 0, \quad z \neq 0.$$

Zijn de voorwaarden (6) vervuld, dan kan men $\Gamma(z)$ definiëren door (5). Voor $z=0$ wordt $\Gamma(z)$ niet gedefinieerd, maar $|\Gamma(z)| \rightarrow \infty$ als $z \rightarrow 0$. De functie $\Gamma(z)$ heeft dus nu betekenis voor $\Re(z) > -1$, $z \neq 0$. Het rechterlid van (5) heeft dus ook betekenis voor $-2 < \Re(z) \leq -1$, $z \neq -1$. Voor deze waarden van z wordt $\Gamma(z)$ nu gedefinieerd door (5); uit deze definitie volgt $|\Gamma(z)| \rightarrow \infty$, als $z \rightarrow -1$.

Zo gaan we verder; de functie $\Gamma(z)$ krijgt betekenis voor alle waarden van z met uitzondering van $z=0, -1, -2, \dots$. Voor alle waarden van

z , waarvoor $\Gamma(z)$ is gedefinieerd, is $\Gamma(z)$ dan continu en $\neq 0$ en voldoet aan (4). Als z nadert tot één van de getallen $0, -1, -2, \dots$, dan

$$|\Gamma(z)| \rightarrow \infty$$

De functie $\frac{1}{\Gamma(z)}$ heeft nu betekenis en is $\neq 0$ en continu voor alle waarden van z , waarvoor $\Gamma(z)$ is gedefinieerd. Bovendien nadert $\frac{1}{\Gamma(z)}$ tot 0, als z nadert tot één van de getallen $0, -1, -2, \dots$. We geven daarom aan $\frac{1}{\Gamma(z)}$ de waarde 0, als $z=0, -1, -2, \dots$. De functie $\frac{1}{\Gamma(z)}$ heeft dan betekenis voor alle waarden van z .

Uit (1) en (4) volgt

$$(7) \quad \Gamma(a+r) = \Gamma(a) \cdot (a)_r \quad (a \neq 0, -1, -2, \dots; r=0, 1, 2, \dots).$$

Deze formule kunnen we ook schrijven in de vorm

$$(8) \quad \frac{(a)_r}{\Gamma(a+r)} = \frac{1}{\Gamma(a)}$$

en deze betrekking blijkt ook nog te gelden voor $a=0, -1, -2, \dots$.

De gewone hypergeometrische functie $F(a, b; c; z)$ wordt gedefinieerd door

$$F(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n \quad (c \neq 0, -1, -2, \dots).$$

Is $a=0, -1, -2, \dots$, dan is F wegens (2) een veelterm in z ; evenzo voor $b=0, -1, -2, \dots$. Is geen van de getallen a en b gelijk aan 0 of een negatief geheel getal, dan breekt de reeks niet af en de convergentiestraal is gelijk aan 1, zodat $F(a, b; c; z)$ betekenis heeft voor $|z| < 1$.

Als uitbreiding van $F(a, b; c; z)$ beschouwen we, als p en q geheel 0 zijn, de functie

$$(9) \quad {}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n}{n! (\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n} z^n;$$

we moeten hierbij aannemen, dat geen der getallen β gelijk is aan $0, -1, -2, \dots$. Is $p \geq 1$ en één der getallen α gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan is ${}_pF_q(z)$ een veelterm in z , zodat ${}_pF_q(z)$ in dit geval betekenis heeft voor elke z , onverschillig welke waarden p en q hebben ($p \geq 1$). Als we dit geval buiten beschouwing laten en de reeks voor ${}_pF_q(z)$ schrijven in de vorm

$${}_pF_q(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots, \quad \text{dan is} \quad \left| \frac{A_n}{A_{n+1}} \right| \text{ gelijk aan}$$

$$(10) \quad \left| \frac{(1+h)(\beta_1+h)\dots(\beta_q+h)}{(\alpha_1+h)\dots(\alpha_p+h)} \right|,$$

waaruit volgt, dat de convergentiestraal gelijk is aan

$$\begin{aligned} &\infty, \text{ als } p < q+1, \\ &1, \text{ als } p = q+1, \\ &0, \text{ als } p > q+1. \end{aligned}$$

De functie $F(a,b;c;z)$ kan nu worden voorgesteld door ${}_2F_1(a,b;c;z)$. ${}_pF_q(z)$ heet de gegeneraliseerde hypergeometrische functie (Pochhammer, Barnes).

In (9) moesten we aannemen, dat iedere $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$. Om deze onderstelling kwijt te raken beschouwen we naast ${}_pF_q(z)$ de functie ${}_p\tilde{F}_q(z)$, die gedefinieerd wordt door

$$(11) \quad {}_p\tilde{F}_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_h \dots (\alpha_p)_h}{h! \Gamma(\beta_1+h) \dots \Gamma(\beta_q+h)} z^h.$$

Daar de functie $\Gamma(w)$ nergens nul wordt, treedt in de noemer van de algemene term van deze reeks nimmer de factor 0 op, zodat we niet meer behoeven aan te nemen, dat de getallen $\beta \neq 0, -1, -2, \dots$ zijn.

Is $p \geq 1$ en één der getallen α gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan is ${}_p\tilde{F}_q(z)$ evenals ${}_pF_q(z)$ een veelterm in z , die betekenis heeft voor elke z , onverschillig welke waarden p en q hebben ($p \geq 1$). Als we van dit geval afzien en de reeks voor ${}_p\tilde{F}_q(z)$ schrijven in de vorm

$${}_p\tilde{F}_q(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots,$$

dan heeft $\left| \frac{A_h}{A_{h+1}} \right|$ voor voldoende grote waarden van h de door (10) gegeven waarde; de convergentiestraal van de reeks (11) is dus even groot als die van (9).

Is geen van de getallen β gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan blijkt tussen ${}_pF_q(z)$ en ${}_p\tilde{F}_q(z)$ het volgende verband te bestaan (zie (7))

$${}_p\tilde{F}_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \frac{{}_pF_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z)}{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_q)}$$

We zullen ${}_p\tilde{F}_q(z)$ evenals ${}_pF_q(z)$ een gegeneraliseerde hypergeometrische functie noemen.

Daar de functie $\tilde{F}$ boven F het voordeel heeft, dat de getallen β gelijk mogen zijn aan $0, -1, -2, \dots$, zullen we van nu af steeds de functie $\tilde{F}$ gebruiken.

Vele functies zijn bijzondere gevallen van de functie Φ ; er gelden bijvoorbeeld de volgende betrekkingen:

$$(12) \quad {}_0\Phi_0(\zeta) = e^{\zeta},$$

$$(13) \quad {}_1\Phi_0(a; \zeta) = (1-\zeta)^{-a},$$

$$(14) \quad J_{\alpha}(\zeta) = \left(\frac{1}{2}\zeta\right)^{\alpha} {}_0\Phi_1(1+\alpha; -\frac{1}{4}\zeta^2) \quad (\zeta \neq 0)$$

(hierin is $J_{\alpha}(\zeta)$ de functie van Bessel) en

$$(15) \quad M_{k,m}(\zeta) = \Gamma(1+2m) \zeta^{\frac{1}{2}+m} e^{-\frac{1}{2}\zeta} {}_1\Phi_1\left(\frac{1}{2}-k+m; 1+2m; \zeta\right)$$

$$(\zeta \neq 0; 2m \neq -1, -2, -3, \dots)$$

(hierin is $M_{k,m}(\zeta)$ een functie van Whittaker).

Serie voordrachten over:

Ontwikkelingen van gegeneraliseerde
hypergeometrische functies

door

Prof. Dr. C.S. Meijer

Tweede voordracht op 24 October 1955

Ook de veelterm $L_r^{(\alpha)}(\lambda)$ van Laguerre kan op zeer eenvoudige wijze in de functie Φ worden uitgedrukt. Is $r = 0, 1, 2, \dots$, dan wordt $L_r^{(\alpha)}(\lambda)$ gedefinieerd door

$$L_r^{(\alpha)}(\lambda) = \frac{1}{r!} \sum_{h=0}^r \frac{(1+\alpha+h)_{r-h} \cdot (-r)_h \lambda^h}{h!}$$

Men noemt r de orde van de veelterm en α de parameter. Vermenigvuldigt men beide leden van de betrekking met $\frac{1}{\Gamma(1+\alpha+r)}$ en maakt men gebruik van (8), dan komt er

$$\frac{L_r^{(\alpha)}(\lambda)}{\Gamma(1+\alpha+r)} = \frac{1}{r!} \sum_{h=0}^r \frac{(-r)_h \lambda^h}{h! \Gamma(1+\alpha+h)};$$

wegens (11) krijgen wij dus

$$(16) \quad \frac{L_r^{(\alpha)}(\lambda)}{\Gamma(1+\alpha+r)} = \frac{1}{r!} \Phi_1(-r; 1+\alpha; \lambda).$$

Is $1+\alpha \neq -r, -r-1, -r-2, \dots$, dan kan deze betrekking ook worden geschreven in de vorm

$$(17) \quad L_r^{(\alpha)}(\lambda) = \frac{\Gamma(1+\alpha+r)}{r!} \Phi_1(-r; 1+\alpha; \lambda).$$

De door (11) gedefinieerde functie Φ is een symmetrische functie van $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ en eveneens een symmetrische functie van $\beta_1, \dots, \beta_q$.
Uit (11) en (1) blijkt

$$(18) \quad \Phi_{p,q}(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; 0) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_q)};$$

met behulp van (8) volgt uit (11)

(A₂) voor elke $\zeta \neq 1$.

Het ligt voor de hand te vragen of er voor de functie

$${}_{p+1}\phi_{q+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma; \beta_1, \dots, \beta_q, \delta; \zeta)$$

een betrekking bestaat, die (A₁) en (A₂) als bijzondere gevallen bevat. Het zal blijken, dat een dergelijke betrekking bestaat; wij noemen hem formule (A).

In deze formule (A) blijkt als bijzonder geval ook opgesloten te zitten de volgende bekende formule uit de theorie der functies van Bessel

$$\frac{1}{\Gamma(1+\mu)} J_\nu(w) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\nu-\mu)_r \cdot (\frac{1}{2}w)^{\nu-\mu+r}}{r! \Gamma(1+\nu+r)} J_{\mu+r}(w) \quad (w \neq 0).$$

Deze formule kan met behulp van (14) herleid worden tot

$$\frac{(\frac{1}{2}w)^\nu}{\Gamma(1+\mu)} {}_0\phi_1(1+\nu; -\frac{1}{4}w^2) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\nu-\mu)_r \cdot (\frac{1}{2}w)^{\nu+2r}}{r! \Gamma(1+\nu+r)} {}_0\phi_1(1+\mu+r; -\frac{1}{4}w^2).$$

Wij delen aan weerskanten door $(\frac{1}{2}w)^\nu$ en stellen daarna $\frac{1}{4}w^2 = -\zeta$; dan komt er

$$(A_3) \frac{1}{\Gamma(1+\mu)} {}_0\phi_1(1+\nu; \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\nu-\mu)_r \cdot (-\zeta)^r}{r! \Gamma(1+\nu+r)} {}_0\phi_1(1+\mu+r; \zeta);$$

deze formule blijkt ook nog te gelden voor $\zeta = 0$.

Nu heeft Erdélyi bij zijn onderzoekingen over de functies van Whittaker in 1937 twee betrekkingen afgeleid, die na enige transformaties overgaan in formules, die veel op (A₃) gelijken. De eerste van die formules krijgt na die transformaties de vorm

$$(A_4) \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \phi_1(\alpha; \delta; \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta-\gamma)_r \cdot (\alpha)_r}{r! \Gamma(\delta+r)} (-\zeta)^r \phi_1(\alpha+r; \gamma+r; \zeta)$$

en de tweede formule krijgt de vorm

$$(A_5) \phi_1(\gamma; \beta; \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta-\gamma)_r}{r!} (-\zeta)^r \phi_1(\delta+r; \beta+r; \zeta).$$

Beide betrekkingen gelden voor alle waarden van ζ . Een betrekking, die veel op (A₄) en (A₅) gelijk, was reeds in 1913 door Nielsen gevonden, nl.

$$(A_6) {}_2\phi_1(\alpha, \gamma; \beta; \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta-\gamma)_r \cdot (\alpha)_r}{r!} (-\zeta)^r {}_2\phi_1(\alpha+r, \delta+r; \beta+r; \zeta);$$

is $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$, dan geldt deze betrekking voor $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$; is $\alpha = 0, -1, -2, \dots$, dan geldt (A₆) voor elke ζ .

Het is duidelijk, dat (A_3) , (A_4) , (A_5) en (A_6) veel op elkaar gelijken en dus is het zeer voor de hand liggend te proberen één formule af te leiden, die (A_3) - (A_6) als bijzondere gevallen bevat. Het zal nu blijken, dat er één formule (A) bestaat, die niet alleen (A_1) en (A_2) maar ook (A_3) - (A_6) als bijzondere gevallen bevat.

Klasse 2.

$$(B_1) \quad {}_1\phi_1(\gamma; 2\gamma; 2\zeta) = \frac{\sqrt{\pi} e^{-\zeta}}{2^{2\gamma-1} \Gamma(\gamma)} {}_0\phi_1\left(\frac{1}{2} + \gamma; \frac{1}{4} \zeta^2\right),$$

$$(B_2) \quad {}_2\phi_1(\alpha, \gamma; 2\gamma; 2\zeta) = \frac{\sqrt{\pi} (1-\zeta)^{-\alpha}}{2^{2\gamma-1} \Gamma(\gamma)} {}_2\phi_1\left(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\alpha; \frac{1}{2} + \gamma; \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^2\right)$$

Deze formules zijn afkomstig van Kummer. (B_1) geldt voor alle waarden van ζ ; is $\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$, dan geldt (B_2) voor $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$; is $\alpha = 0, -1, -2, \dots$ dan geldt (B_2) voor elke $\zeta \neq 1$.

Het ligt voor de hand te proberen voor de functie

$${}_{p+1}\phi_{q+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma; \beta_1, \dots, \beta_q, 2\gamma; 2\zeta)$$

een betrekking af te leiden, die (B_1) en (B_2) als bijzondere gevallen bevat. De te bepalen betrekking noemen wij formule (B).

Wij beschouwen nu een functie van twee veranderlijken $F(\lambda, w)$ en nemen aan, dat deze kan worden ontwikkeld in een machtreeks naar opklimmende machten van w .

$$(20) \quad F(\lambda, w) = \sum_{r=0}^{\infty} A_r(\lambda) w^r.$$

Men noemt $F(\lambda, w)$ een voortbrengende of genererende functie van de functies $A_r(\lambda)$. Wij zullen nu twee ontwikkelingen van de gedaante (20) geschouwen, die door vele schrijvers zijn gevonden; in beide zal $A_r(\lambda)$ op een zeer eenvoudige wijze uit te drukken zijn in de veeltermen van Laguerre. In de eerste ontwikkeling zal $A_r(\lambda)$ gelijk zijn aan

$$\frac{L_r^{(\alpha)}(\lambda)}{\Gamma(1+\alpha+r)};$$

in de tweede zal $A_r(\lambda) \doteq L_r^{(\alpha)}(\lambda)$ zijn. De eerste ontwikkeling wordt door bijna iedereen in de volgende gedaante geschreven

$$(21) \quad e^{w(\lambda w)^{-\frac{1}{2}\alpha}} \int_{\alpha}^{\infty} \left\{ 2(\lambda w)^{\frac{1}{2}} \right\} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{L_r^{(\alpha)}(\lambda) w^r}{\Gamma(1+\alpha+r)};$$

de tweede ontwikkeling luidt als volgt:

$$(22) \quad (1-z)^{-1-\alpha} e^{\frac{\lambda z}{z-1}} = \sum_{r=0}^{\infty} L_r^{(\alpha)}(\lambda) z^r.$$

(Sonine (1880); vele andere onderzoekers ($\pm$ 1920-1950)). Formule (21) geldt voor alle waarden van λ en w , formule (22) voor $|z| < 1$ en alle waarden van λ . Wij beschouwen nu eerst formule (21) en komen dan op

Klasse 3.

Maken wij gebruik van (14) en (16), dan kunnen wij (21) schrijven in de vorm

$$(C_1) \quad e^w {}_0\phi_1(1+\alpha; -\lambda w) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} {}_1\phi_1(-r; 1+\alpha; \lambda) w^r.$$

Deze gedaante van (21) komt ook voor bij Humbert (1924). Humbert geeft ook nog de volgende ontwikkeling

$$(C_2) \quad e^w {}_1\phi_1(\gamma; \delta; -\lambda w) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} {}_2\phi_1(-r, \gamma; \delta; \lambda) w^r;$$

deze geldt evenals (C₁) voor alle waarden van λ en w .

Het ligt nu voor de hand te vragen of er voor de veelterm

$$(23) \quad {}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_k; \lambda) \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

een soortgelijke genererende betrekking bestaat; wij zoeken dus een betrekking, die (C₁) en (C₂) als bijzondere gevallen bevat. De te bepalen betrekking noemen wij formule (C).

Klasse 4.

Formule (22) kan met behulp van (17) worden geschreven in de vorm

$$(24) \quad (1-z)^{-1-\alpha} e^{\frac{\lambda z}{z-1}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha-r)}{r!} {}_1\phi_1(-r; 1+\alpha; \lambda) z^r$$

($|z| < 1$; $1+\alpha \neq 0, -1, -2, \dots$).

Een uitbreiding van deze formule is gevonden door Erdélyi, P. Appell, Pinney en Toscano, nl.

$$(D_1) \quad (1-z)^{-a} {}_1\phi_1(a; c; \frac{\lambda z}{z-1}) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{r!} {}_1\phi_1(-r; c; \lambda) z^r,$$

geldig voor $|z| < 1$ en willekeurige waarden van λ ; is $a = 0, -1, -2, \dots$, dan geldt (D₁) voor $z \neq 1$ en alle waarden van λ .

Een met (D₁) verwante formule is door Feldheim gevonden

$$(D_2) \quad (1-z)^{-a} {}_2\phi_1 \left(a, b; c; \frac{\lambda z}{z-1} \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{r!} {}_2\phi_1 \left(-r, b; c; \lambda \right) z^r.$$

Zijn a en $b \neq 0, -1, -2, \dots$, dan geldt deze betrekking voor

$$|z| < 1, \quad |(\lambda-1)z| < 1;$$

is $b = 0, -1, -2, \dots$, maar $a \neq 0, -1, -2, \dots$, dan geldt (D_2) voor $|z| < 1$ en alle waarden van λ ; is $a = 0, -1, -2, \dots$, dan geldt (D_2) voor $z \neq 1$ en alle waarden van λ .

Het ligt nu voor de hand te proberen een formule (D) af te leiden, die (D_1) en (D_2) als bijzondere gevallen bevat en zodanig dat in het rechterlid de veelterm (23) optreedt.

Serie voordrachten over:
Ontwikkelingen van gegeneraliseerde
hypergeometrische functies
 door

Prof. Dr. C.S. Meijer

Derde voordracht op 7 November 1955

Klasse 5.

Wij gaan uit van de bekende ontwikkeling

$$(25) \quad \frac{(\frac{1}{2}w)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}w)^r}{r!} J_{\nu+r}(w) \quad (w \neq 0).$$

Drukken wij met behulp van (14) de functie J van Bessel uit in de functie ${}_0\phi_1$, dan gaat (25) over in

$$\frac{(\frac{1}{2}w)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}w)^{\nu+2r}}{r!} {}_0\phi_1(1+\nu+r; -\frac{1}{4}w^2).$$

Wij delen aan weerskanten door $(\frac{1}{2}w)^{\nu}$ en stellen daarna $\frac{1}{4}w^2 = -\zeta$; dan gaat deze betrekking over in

$$(E_1) \quad \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^r}{r!} {}_0\phi_1(1+\nu+r; \zeta);$$

deze betrekking blijkt ook nog te gelden voor $\zeta = 0$.

In 1936 heeft Erdélyi bij zijn onderzoekingen over de functie van Whittaker een betrekking afgeleid, die na het aanbrengen van enige vereenvoudigingen overgaat in een ontwikkeling, die veel op (E_1) gelijkt, nl. een ontwikkeling van een constante in een reeks van functies ${}_1\phi_1$. De formule van Erdélyi krijgt na die transformaties de gedaante

$$(E_2) \quad \frac{1}{\Gamma(\beta)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r \cdot (-\zeta)^r}{r!} {}_1\phi_1(\alpha+r; \beta+r; \zeta),$$

geldig voor alle waarden van ζ .

In 1930 ontmoette Bailey bij een onderzoek over bolfuncties een ontwikkeling van een constante in een reeks van functies ${}_2\phi_1$. Bailey vond nl. de betrekking

$$(E_3) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{m!} &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+m+n)_r \cdot (m-n)_r}{r!} (-1)^r \sin^{2r} \frac{1}{2} \vartheta \times \\ &\times {}_2\phi_1(1+m+n+r, m-n+r; 1+m+r; \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta), \end{aligned} \right.$$

geldig als $-\frac{1}{2}\pi < \vartheta < \frac{1}{2}\pi$.

Als men (E_1) , (E_2) en (E_3) met elkaar vergelijkt, komt men natuurlijk tot de vraag of er ook een ontwikkeling bestaat, die (E_1) , (E_2) en (E_3) als bijzondere gevallen bevat, d.w.z. een ontwikkeling van een constante in een reeks van functies van de gedaante

$$\sum \zeta^r {}_p\phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta).$$

De door ons te bepalen formule noemen wij (E).

Klasse 6.

De laatste jaren hebben verscheiden mathematici, die bezig waren met onderzoekingen, waarbij veeltermen van Laguerre optreden, de volgende formule ontmoet

$$L_n^{(\beta)}(\lambda) = \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-r)_{n-r}}{(n-r)!} L_r^{(\alpha)}(\lambda),$$

geldig voor alle waarden van α , β en λ .

Wij vermenigvuldigen beide leden van deze betrekking met

$$\frac{n!}{\Gamma(1+\beta+n)\Gamma(1+\alpha)}.$$

In het rechterlid vervangen wij $\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$ met behulp van (8) door $\frac{(1+\alpha)_r}{\Gamma(1+\alpha+r)}$; er komt dan

$$\frac{n!}{\Gamma(1+\beta+n)\Gamma(1+\alpha)} L_n^{(\beta)}(\lambda) = \frac{n!}{\Gamma(1+\beta+n)} \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-r)_{n-r} \cdot (1+\alpha)_r}{(n-r)! \Gamma(1+\alpha+r)} L_r^{(\alpha)}(\lambda).$$

Deze betrekking kan wegens (16) ook geschreven worden in de vorm

$$(F_1) \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} {}_1\phi_1(-n; 1+\beta; \lambda) = \frac{n!}{\Gamma(1+\beta+n)} \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-r)_{n-r} \cdot (1+\alpha)_r}{(n-r)! r!} {}_1\phi_1(-r; 1+\alpha; \lambda).$$

Wij zoeken nu een formule (F), die een uitbreiding is van (F_1) . De uitbreiding zal daarin bestaan, dat in het rechterlid in plaats van ${}_1\phi_1(-r; 1+\alpha; \lambda)$ de functie ${}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_k; \lambda)$ optreedt.

Wij moeten nu de formules (A) - (F) bepalen. Wij zullen laten zien, dat er een zeer algemene formule (G) bestaat, waarin (A) - (F) alle zes als bijzonder geval opgesloten zitten. Deze algemene formule (G) luidt als volgt:

Ontwikkelingen van gegeneraliseerde
hypergeometrische functies

door

Prof. Dr C.S. Meijer

Derde voordracht op 7 November 1955

Klasse 5.

Wij gaan uit van de bekende ontwikkeling

$$(25) \quad \frac{(\frac{1}{2} w)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} w)^r}{r!} J_{\nu+r}(w) \quad (w \neq 0).$$

Drukken wij met behulp van (14) de functie J van Bessel uit in de functie ${}_0\phi_1$, dan gaat (25) over in

$$\frac{(\frac{1}{2} w)^{\nu}}{\Gamma(1+\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} w)^{\nu+2r}}{r!} {}_0\phi_1(1+\nu+r; -\frac{1}{4} w^2).$$

Wij delen aan weerskanten door $(\frac{1}{2} w)^{\nu}$ en stellen daarna $\frac{1}{4} w^2 = -\zeta$; dan gaat deze betrekking over in

$$(E_1) \quad \frac{1}{\Gamma(1+\nu)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\zeta)^r}{r!} {}_0\phi_1(1+\nu+r; \zeta);$$

deze betrekking blijkt ook nog te gelden voor $\zeta = 0$.

In 1936 heeft Erdélyi bij zijn onderzoekingen over de functie van Whittaker een betrekking afgeleid, die na het aanbrengen van enige vereenvoudigingen overgaat in een ontwikkeling, die veel op (E₁) gelijkt, nl. een ontwikkeling van een constante in een reeks van functies ${}_1\phi_1$. De formule van Erdélyi krijgt na die transformaties de gedaante

$$(E_2) \quad \frac{1}{\Gamma(\beta)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_r \cdot (-\zeta)^r}{r!} {}_1\phi_1(\alpha+r; \beta+r; \zeta),$$

geldig voor alle waarden van ζ .

In 1930 ontmoette Bailey bij een onderzoek over bolfuncties een ontwikkeling van een constante in een reeks van functies ${}_2\phi_1$. Bailey vond nl. de betrekking

$$(E_3) \quad \begin{cases} \frac{1}{m!} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(1+m+n)_r \cdot (m-n)_r}{r!} (-1)^r \sin^{2r} \frac{1}{2} \vartheta \times \\ \times {}_2\phi_1(1+m+n+r, m-n+r; 1+m+r; \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta), \end{cases}$$

geldig als $-\frac{1}{2}\pi < \vartheta < \frac{1}{2}\pi$.

Als men (E_1) , (E_2) en (E_3) met elkaar vergelijkt, komt men natuurlijk tot de vraag of er ook een ontwikkeling bestaat, die (E_1) , (E_2) en (E_3) als bijzondere gevallen bevat, d.w.z. een ontwikkeling van een constante in een reeks van functies van de gedaante

$$\sum^r p \phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta).$$

De door ons te bepalen formule noemen wij (E) .

Klasse 6.

De laatste jaren hebben verscheiden mathematici, die bezig waren met onderzoekingen, waarbij veeltermen van Laguerre optreden, de volgende formule ontmoet

$$L_n^{(\beta)}(\lambda) = \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-\alpha)_{n-r}}{(n-r)!} L_r^{(\alpha)}(\lambda),$$

geldig voor alle waarden van α , β en λ .

Wij vermenigvuldigen beide leden van deze betrekking met

$$\frac{n!}{\Gamma(1+\beta+n) \Gamma(1+\alpha)}.$$

In het rechterlid vervangen wij $\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$ met behulp van (8) door $\frac{(1+\alpha)_r}{\Gamma(1+\alpha+r)}$; er komt dan

$$\frac{n!}{\Gamma(1+\beta+n) \Gamma(1+\alpha)} L_n^{(\beta)}(\lambda) = \frac{n!}{\Gamma(1+\beta+n)} \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-\alpha)_{n-r} \cdot (1+\alpha)_r}{(n-r)! \Gamma(1+\alpha+r)} L_r^{(\alpha)}(\lambda).$$

Deze betrekking kan wegens (16) ook geschreven worden in de vorm

$$(E_1) \quad \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} {}_1\phi_1(-n; 1+\beta; \lambda) = \frac{n!}{\Gamma(1+\beta+n)} \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-\alpha)_{n-r} \cdot (1+\alpha)_r}{(n-r)! r!} {}_1\phi_1(-r; 1+\alpha; \lambda).$$

Wij zoeken nu een formule (F) , die een uitbreiding is van (E_1) . De uitbreiding zal daarin bestaan, dat in het rechterlid in plaats van ${}_1\phi_1(-r; 1+\alpha; \lambda)$ de functie ${}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_k; \lambda)$ optreedt.

Wij moeten nu de formules $(A) - (F)$ bepalen. Wij zullen laten zien, dat er een zeer algemene formule (G) bestaat, waarin $(A) - (F)$ alle zes als bijzonder geval opgesloten zitten. Deze algemene formule (G) luidt als volgt:

$$(G) \left\{ \begin{aligned} & \phi_{p+k, q+1}(\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q, \delta_1, \dots, \delta_1; \lambda \zeta) = \\ & \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} \phi_{k+1}(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; \lambda) \times \\ & \times \prod_{j=1}^p (\alpha_j)_r \cdot (-\zeta)^r \phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta). \end{aligned} \right.$$

Wat de geldigheid van (G) betreft moeten wij drie hoofdgevallen I, II en III onderscheiden. Hoofdgeval I wordt nog weer gesplitst in vijf ondergevallen Ia - Ie; hoofdgeval II wordt gesplitst in de twee ondergevallen IIa en IIb.

Hoofdgeval I: Geen van de getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ en $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ is gelijk aan 0, -1, -2, Wij nemen dan aan, dat k, l, p en q voldoen aan $k \geq 0$, $l \geq 0$, $q \geq 0$, $0 \leq p \leq q+1$, $p+k \leq q+1+1$.

Wij onderscheiden nu de volgende vijf ondergevallen:

Ia. Als $p < q+1$ en bovendien $p+k < q+1+1$, dan geldt (G) voor alle waarden van λ en ζ .

Ib. Als $p < q+1$ en $p+k = q+1+1$, dan geldt (G) mits λ en ζ voldoen aan $|\lambda \zeta| < 1$.

Ic. Als $p = q+1$ en $k < 1$, dan geldt (G) voor $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$ en alle waarden van λ .

Id. Als $p = q+1$ en $k = 1 = 0$, dan geldt (G) mits λ en ζ voldoen aan

$$\zeta \neq 1, \quad \left| \frac{(\lambda-1)\zeta}{\zeta-1} \right| < 1.$$

Ie. Als $p = q+1$ en $k = 1 > 0$, dan geldt (G) mits λ en ζ voldoen aan

$$\Re(\zeta) < \frac{1}{2}, \quad \left| \frac{(\lambda-1)\zeta}{\zeta-1} \right| < 1.$$

Hoofdgeval II: $k \geq 1$ en tenminste één der getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ is gelijk aan 0, -1, -2, ..., maar geen van de getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ is gelijk aan 0, -1, -2, Wij nemen dan aan, dat k, l, p en q voldoen aan

$$k \geq 1, \quad l \geq 0, \quad q \geq 0, \quad 0 \leq p \leq q+1.$$

Wij onderscheiden nu twee ondergevallen:

IIa. Als $p < q+1$, dan geldt (G) voor alle waarden van λ en ζ .

IIb. Als $p = q+1$, dan geldt (G) voor $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$ en alle waarden van λ .

Hoofdgeval III: $p \geq 1$ en tenminste één der getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ is gelijk aan 0, -1, -2, Wij nemen dan aan, dat k, l, p en q voldoen aan

$$k \geq 0, \quad l \geq 0, \quad p \geq 1, \quad q \geq 0.$$

Formule (G) geldt dan voor alle waarden van λ en ζ .

Wij zullen nu laten zien, dat de door ons gezochte formules (A) - (F) door specialisatie uit (G) kunnen worden afgeleid. Wij beginnen met (A). Wij stellen in (G):

$$k = 1 = 1, \gamma_1 = \gamma, \delta_1 = \delta, \lambda = 1$$

en maken gebruik van de bekende formule

$$(26) \quad {}_2\phi_1(-r, \gamma; \delta; 1) = \frac{(\delta-\gamma)_r}{\Gamma(\delta+r)} \quad (r = 0, 1, 2, \dots).$$

(G) gaat dan over in

$$(A) \quad \begin{cases} {}_{p+1}\phi_{q+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma; \beta_1, \dots, \beta_q, \delta; \zeta) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta-\gamma)_r}{r! \Gamma(\delta+r)} \prod_{j=1}^p (\alpha_j)_r \cdot (-\zeta)^r {}_p\phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta). \end{cases}$$

De voorwaarden voor de geldigheid van (G) leveren de volgende voorwaarden voor de geldigheid van (A):

Als geen van de getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ gelijk is aan 0, -1, -2, ..., dan voldoen p en q aan

$$q \geq 0, \quad 0 \leq p \leq q+1;$$

formule (A) geldt dan voor alle waarden van ζ als $p < q+1$ en voor $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$ als $p = q+1$.

Is $p \geq 1$ en één van de getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ gelijk aan 0, -1, -2, ..., dan behoeven wij slechts aan te nemen $p \geq 1, q \geq 0$ en ζ is willekeurig.

Wij kunnen zeer gemakkelijk aantonen, dat (A_1) en (A_2) bijzondere gevallen zijn van (A). Voor $p = q = 0$ gaat (A) wegens (12) over in

$${}_1\phi_1(\gamma; \delta; \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta-\gamma)_r}{r! \Gamma(\delta+r)} (-\zeta)^r e^{\zeta};$$

het rechterlid van deze betrekking is wegens (11) gelijk aan

$$e^{\zeta} {}_1\phi_1(\delta-\gamma; \delta; -\zeta),$$

zodat wij op (A_1) terecht komen.

Wij nemen nu $p = 1, q = 0$ en $\alpha_1 = \alpha$; voor elke $\zeta \neq 1$ geldt wegens (13)

$${}_1\phi_0(\alpha+r; \zeta) = (1-\zeta)^{-\alpha-r}$$

Formule (A) gaat dus over in

$${}_2\phi_1(\alpha, \gamma; \delta; \zeta) = (1-\zeta)^{-\alpha} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta-\gamma)_r \cdot (\alpha)_r}{r! \Gamma(\delta+r)} \left(\frac{\zeta}{\zeta-1}\right)^r;$$

het rechterlid van deze betrekking is wegens (11) gelijk aan

$$(1-\zeta)^{-\alpha} {}_2\phi_1(\delta-\gamma, \alpha; \delta; \frac{\zeta}{\zeta-1});$$

Wij krijgen dus (A_2) .

Serie voordrachten over:
Ontwikkelingen van gegeneraliseerde
hypergeometrische functies

door

Prof. Dr. C.S. Meijer

Vierde voordracht op 21 November 1955

Om aan te tonen, dat $(A_3)-(A_6)$ specialisaties zijn van (A) gaan wij als volgt te werk. Wij onderstellen eerst $q \geq 1$ en nemen in (A) $\beta_q = \gamma$. Met behulp van (19) vindt men dan

$$(A') \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\gamma)} {}_p\phi_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_{q-1}, \delta; \zeta) = \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta-\gamma)_r}{r! \Gamma(\delta+r)} \prod_{j=1}^p (\alpha_j)_r \cdot (-\zeta)^r {}_p\phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \\ & \qquad \qquad \qquad \beta_1+r, \dots, \beta_{q-1}+r, \gamma+r; \zeta). \end{aligned} \right.$$

Vervolgens onderstellen wij $p \geq 1$ en nemen in (A) $\alpha_p = \delta$. Met behulp van (19) en (8) komt er dan

$$(A'') \left\{ \begin{aligned} & {}_p\phi_q(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \gamma; \beta_1, \dots, \beta_q; \zeta) \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\delta-\gamma)_r}{r!} \prod_{j=1}^{p-1} (\alpha_j)_r (-\zeta)^r {}_p\phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_{p-1}+r, \delta+r; \\ & \qquad \qquad \qquad \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta). \end{aligned} \right.$$

Het is nu terstond in te zien, dat (A_3) en (A_4) bijzondere gevallen zijn van (A') ; evenzo, dat (A_5) en (A_6) in (A'') opgesloten zitten.

Voor (A') en (A'') zie men ook C. Fox, Proc. London Math. Soc. (2), 26 (1927), p. 201-210 (formules (1.9) en (1.11)).

De betrekking (B), die (B_1) en (B_2) als bijzondere gevallen bevat, kan op de volgende wijze uit (G) worden afgeleid. Wij stellen in (G) $k = 1 = 1$, $\lambda = 2$, $\gamma_1 = \gamma$ en $\delta_1 = 2\gamma$. Formule (G) levert dan

$$(27) \left\{ \begin{aligned} & {}_{p+1}\phi_{q+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma; \beta_1, \dots, \beta_q, 2\gamma; 2\zeta) \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} {}_2\phi_1(-r, \gamma; 2\gamma; 2) \prod_{j=1}^p (\alpha_j)_r \cdot (-\zeta)^r \times \\ & \quad \times {}_p\phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta). \end{aligned} \right.$$

Wij maken nu gebruik van

$${}_2\phi_1(-2r-1, \gamma; 2\gamma; 2) = 0 \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

en

$${}_2\phi_1(-2r, \gamma; 2\gamma; 2) = \frac{\sqrt{\pi}(2r)!}{2^{2r+2\gamma-1} \Gamma(\gamma)r! \Gamma(\frac{1}{2}+\gamma+r)} \quad (r = 0, 1, 2, \dots)$$

(27) gaat dan over in

$$(B) \begin{cases} {}_{p+1}\phi_{q+1}(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \gamma; \beta_1, \dots, \beta_q, 2\gamma; 2\zeta) \\ = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\gamma-1} \Gamma(\gamma)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^p (\alpha_j)_{2r}}{r! \Gamma(\frac{1}{2}+\gamma+r) 2^{2r}} \times \\ \times \zeta^{2r} {}_p\phi_q(\alpha_1+2r, \dots, \alpha_p+2r; \beta_1+2r, \dots, \beta_q+2r; \zeta). \end{cases}$$

Uit de geldigheidsvoorwaarden voor (G), leidt men af, dat (B) geldt onder de volgende voorwaarden: Als geen van de getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ gelijk is aan $0, -1, -2, \dots$, dan onderstellen wij $q \geq 0$, $0 \leq p \leq q+1$; is nu $p < q+1$, dan geldt (B) voor alle waarden van ζ ; maar is $p = q+1$, dan geldt (B) voor $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$. Is $p \geq 1$ en één der getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan geldt (B) voor $p \geq 1$, $q \geq 0$ en alle waarden van ζ .

Om (B₁) uit (B) af te leiden, stellen wij $p = q = 0$. Wij krijgen dan met behulp van (12)

$${}_1\phi_1(\gamma; 2\gamma; 2\zeta) = \frac{\sqrt{\pi}e\zeta}{2^{2\gamma-1}\Gamma(\gamma)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\zeta^{2r}}{r! \Gamma(\frac{1}{2}+\gamma+r) 2^{2r}};$$

de som $\sum_{r=0}^{\infty}$ in het rechterlid is wegens (11) gelijk aan ${}_0\phi_1(\frac{1}{2}+\gamma; \frac{1}{4}\zeta^2)$, zodat wij (B₁) vinden.

Dat ook (B₂) een bijzonder geval is van (B) zien wij als volgt. Wij nemen $p = 1$, $q = 0$ en $\alpha_1 = \alpha$ in (B). Wij maken gebruik van

$$(\alpha)_{2r} = 2^{2r} (\frac{1}{2}\alpha)_r \cdot (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha)_r$$

en verder nog van (zie (13))

$${}_1\phi_0(\alpha+2r; \zeta) = (1-\zeta)^{-\alpha-2r}$$

die voor elke $\zeta \neq 1$ geldt. Formule (B) gaat dan over in

$${}_2\phi_1(\alpha, \gamma; 2\gamma; 2\zeta) = \frac{\sqrt{\pi}(1-\zeta)^{-\alpha}}{2^{2\gamma-1}\Gamma(\gamma)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2}\alpha)_r \cdot (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha)_r}{r! \Gamma(\frac{1}{2} + \gamma + r)} \left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)^{2r};$$

de som $\sum_{r=0}^{\infty}$ in het rechterlid van deze betrekking is wegens (11) gelijk aan ${}_2\phi_1(\frac{1}{2}\alpha, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\alpha; \frac{1}{2}+\gamma; (\frac{\zeta}{1-\zeta})^2)$,

waarmee ook (B_2) afgeleid is.

Voor (B) vergelijkte men ook formule (3.3) van het boven reeds geciteerde artikel van C. Fox.

Nu zullen wij uit (G) een betrekking (C) afleiden, die (C_1) en (C_2) als bijzondere gevallen bevat. Deze betrekking (C) heeft de volgende gedaante (zie ook Erdélyi, Higher transcendental functions, III, p. 267)

$$(C) \left\{ \begin{aligned} & e^w {}_k\phi_1(\gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; -\lambda w) \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} {}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; \lambda) w^r. \end{aligned} \right.$$

Het is zonder meer duidelijk, dat (C_1) en (C_2) bijzondere gevallen zijn van (C). Om (C) uit (G) af te leiden stellen wij in (G) $p = q = 0$. De functie $\phi_0(\zeta)$ in het rechterlid van (G) wordt dan wegens (12) gelijk aan e^{ζ} . Stelt men $\zeta = -w$, dan krijgt men dus (C). Uit (G) leiden wij meteen de voorwaarden voor de geldigheid van (C) af: Is geen van de getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan onderstellen wij $1 \geq 0, 0 \leq k \leq 1+1$; is in dit geval $k < 1+1$, dan geldt (C) voor alle waarden van λ en w ; maar is $k = 1+1$, dan geldt (C) voor $|\lambda w| < 1$. Is $k \geq 1$ en één der getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan geldt (C) voor $k \geq 1, 1 \geq 0$ en alle waarden van λ en w .

Wij zullen nu uit (G) door specialisatie een formule (D) afleiden, die (D_1) en (D_2) als bijzondere gevallen bevat. Deze betrekking (D) luidt als volgt (zie ook T.W. Chaundy, Quart. Journ. of Math. (Oxford Series) 14 (1943), p. 55-78, formule (25))

$$(D) \left\{ \begin{aligned} & (1-z)^{-a} {}_{k+1}\phi_1(a, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; \frac{\lambda z}{z-1}) \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{r!} {}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; \lambda) z^r. \end{aligned} \right.$$

Wij zien terstond, dat (D_1) en (D_2) bijzondere gevallen zijn van (D) . Maar nu moet nog worden aangetoond, dat (D) zelf een bijzonder geval is van (G) . Daartoe nemen wij in (G) $p = 1$, $q = 0$ en stellen $\alpha_1 = a$ en $\zeta = \frac{z}{z-1}$ ($z \neq 1$). Voor iedere eindige z is $\zeta \neq 1$. Wij kunnen dus de functie $(-\zeta)^r {}_1\phi_0(a+r; \zeta)$ in het rechterlid van (G) met behulp van (13) op de volgende wijze herleiden

$$(-\zeta)^r {}_1\phi_0(a+r; \zeta) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^r {}_1\phi_0(a+r; \frac{z}{z-1}) = \left(\frac{z}{1-z}\right)^r \left(1 - \frac{z}{z-1}\right)^{-a-r} = z^r (1-z)^a.$$

De ontwikkeling (G) gaat nu over in

$$\begin{aligned} & {}_{k+1}\phi_1(a, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; \frac{\lambda z}{z-1}) = \\ & = (1-z)^a \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{r!} {}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; \lambda) z^r, \end{aligned}$$

en deze betrekking is equivalent met (D) .

De voorwaarden voor de geldigheid van (G) leveren de volgende voorwaarden voor de geldigheid van (D) : Is geen van de getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ en a gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan onderstellen wij $0 \leq k \leq 1$; is in dit geval $k < 1$, dan geldt (D) voor $|z| < 1$ en alle waarden van λ ; is in dit geval $k=1=0$, dan geldt (D) mits $z \neq 1$ en $|(\lambda-1)z| < 1$; is in dit geval $k=1 > 0$, dan geldt (D) mits λ en z voldoen aan $|z| < 1$, $|(\lambda-1)z| < 1$. Is $k \geq 1$ en één der getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, maar $a \neq 0, -1, -2, \dots$, dan onderstellen wij $k \geq 1$, $1 \geq 0$; formule (D) geldt dan voor $|z| < 1$ en alle waarden van λ . Is $a = 0, -1, -2, \dots$, dan behoeven k en 1 slechts te voldoen aan $k \geq 0$, $1 \geq 0$; formule (D) geldt dan voor alle waarden van λ en iedere $z \neq 1$.

Wij zullen nu laten zien, dat de door ons gezochte formule (E) ook een bijzonder geval is van (G) . Wij stellen $k = 1 = \lambda = 0$ in (G) . Met behulp van (18) krijgt men dan

$$(E) \quad \frac{1}{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_q)} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\sum_{j=1}^r (\alpha_j)_r}{r!} (-\zeta)^r {}_p\phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta).$$

De voorwaarden voor de geldigheid van (E) volgen uit die voor de geldigheid van (G) : Is geen van de getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan onderstellen wij $q \geq 0$, $0 \leq p \leq q+1$; is in dit geval $p < q+1$, dan geldt (E) voor alle waarden van ζ ; maar is $p = q+1$, dan geldt (E) voor $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$. Is $p \geq 1$ en één der getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$

gelijk aan 0, -1, -2, ..., dan geldt (E) voor $p \geq 1$, $q \geq 0$ en alle waarden van ζ .

Wij zien terstond, dat (E) overgaat in (E_1) , als wij $p=0$, $q=1$ en $\beta_1 = 1 + \nu$ nemen. Wij krijgen (E_2) voor $p=q=1$, $\alpha_1 = \alpha$ en $\beta_1 = \beta$. Voor $p=2$, $q=1$, $\alpha_1 = 1+m+n$, $\alpha_2 = m-n$, $\beta_1 = 1+m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) en $\zeta = \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta$ met $-\frac{1}{2}\pi < \vartheta < \frac{1}{2}\pi$ krijgt men (E_3) .

Nu zullen wij nog laten zien, dat in (G) ook een formule (F) opgesloten zit, die een uitbreiding is van (F_1) . Wij nemen in (G) $p=2$, $q=1$, $\alpha_1 = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) $\alpha_2 = \alpha$, $\beta_1 = \beta$ en $\zeta = 1$. Wat de geldigheidsvoorwaarden betreft bevinden wij ons dan onder hoofdgeval III van formule (G); in het rechterlid treedt dus op $\sum_{r=0}^n$ in plaats van $\sum_{r=0}^{\infty}$. In het rechterlid maken wij gebruik van $(-1)^r (-n)_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ (zie (1)); de functie ${}_2\phi_1(-n+r, \alpha+r; \beta+r; 1)$ ($r = 0, 1, 2, \dots$) herleiden wij met behulp van (26) ${}_2\phi_1(-n+r, \alpha+r; \beta+r; 1) = \frac{(\beta-\alpha)_{n-r}}{\Gamma(\beta+n)}$. De ontwikkeling (G) levert dan

$$(F) \quad \begin{cases} {}_{k+2}\phi_{1+1}(-n, \alpha, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \beta, \delta_1, \dots, \delta_1; \lambda) \\ = \frac{n!}{\Gamma(\beta+n)} \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-\alpha)_{n-r} (\alpha)_r}{(n-r)! r!} {}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; \lambda). \end{cases}$$

Deze betrekking geldt voor $k \geq 0$, $l \geq 0$ en iedere λ .

Nu moest de door ons te bepalen formule (F) een uitbreiding zijn van (F_1) en wel een zodanige uitbreiding, dat in het rechterlid de veelterm ${}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \delta_1, \dots, \delta_1; \lambda)$ optreedt.

Aan deze laatste voorwaarde is reeds voldaan. Dat (F_1) een bijzonder geval is van (F) zien wij als volgt: neemt men $l \geq 1$ en stelt men $\delta_1 = \alpha$, dan gaat (F) wegens (19) over in

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} {}_{k+1}\phi_1(-n, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \beta, \delta_1, \dots, \delta_{l-1}; \lambda) = \\ & = \frac{n!}{\Gamma(\beta+n)} \sum_{r=0}^n \frac{(\beta-\alpha)_{n-r} (\alpha)_r}{(n-r)! r!} {}_{k+1}\phi_1(-r, \gamma_1, \dots, \gamma_k; \alpha, \delta_1, \dots, \delta_{l-1}; \lambda). \end{aligned}$$

Neemt men hierin nog $k = 0$, $l = 1$ en vervangt men α en β door $1 + \alpha$ en $1 + \beta$, dan krijgt men (F_1) .

Serie voordrachten over
Ontwikkelingen van gegeneraliseerde
hypergeometrische functies

door

Prof. Dr C.S. Meijer

Vijfde voordracht op 12 December 1955

Bewijs van formule (G)

Wij leveren eerst het bewijs van het geval met $k = 1 = 0$ van (G).
 Wij maken hierbij gebruik van

$$(28) \quad \begin{cases} \frac{d^r}{d\zeta^r} {}_p\phi_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; \zeta) = \\ = \prod_{j=1}^p (\alpha_j)_r \cdot {}_p\phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta) \end{cases} ;$$

Deze formule geldt voor $r = 0, 1, 2, \dots$. Het bewijs van (28) gaat als volgt: Wegens (11) heeft men

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} {}_p\phi_q(\zeta) &= \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_h \dots (\alpha_p)_h}{(h-1)! \Gamma(\beta_1+h) \dots \Gamma(\beta_q+h)} \zeta^{h-1} = \\ &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_{h+1} \dots (\alpha_p)_{h+1}}{h! \Gamma(\beta_1+h+1) \dots \Gamma(\beta_q+h+1)} \zeta^h. \end{aligned}$$

Nu volgt uit (1) $(\alpha)_{h+1} = \alpha(\alpha+1)_h$; er komt dus

$$\frac{d}{d\zeta} {}_p\phi_q(\zeta) = \alpha_1 \dots \alpha_p \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1+1)_h \dots (\alpha_p+1)_h}{h! \Gamma(\beta_1+h+1) \dots \Gamma(\beta_q+h+1)} \zeta^h,$$

dus wegens (11)

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\zeta} {}_p\phi_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; \zeta) &= \\ = \alpha_1 \dots \alpha_p {}_p\phi_q(\alpha_1+1, \dots, \alpha_p+1; \beta_1+1, \dots, \beta_q+1; \zeta). \end{aligned}$$

Door herhaalde toepassing van deze betrekking krijgt men (28) met $r = 1, 2, 3, \dots$; voor $r = 0$ is (28) evident wegens (1).

Het geval met $k = 1 = 0$ van (G) wordt nu als volgt bewezen: Is $p < q+1$, dan is de machtreeks in het rechterlid van (11) convergent voor alle waarden van z ; de functie ${}_p\phi_q(z)$ is dan analytisch in het gehele z -vlak. Is ζ een willekeurig getal, dan kan ${}_p\phi_q(z)$ dus worden ontwikkeld in de Taylorsche reeks

$$(29) \quad {}_p\phi_q(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(z-\zeta)^r}{r!} \frac{d^r}{d\zeta^r} {}_p\phi_q(\zeta),$$

die convergeert voor alle waarden van z . Is $\zeta \neq 0$, dan kan men bij elke z het getal λ zodanig kiezen, dat $z = \lambda \zeta$. De Taylorontwikkeling gaat dan over in

$${}_p\phi_q(\lambda \zeta) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} (1-\lambda)^r (-\zeta)^r \frac{d^r}{d\zeta^r} {}_p\phi_q(\zeta).$$

Nu volgt uit (13), dat $(1-\lambda)^r = {}_1\phi_0(-r; \lambda)$. Met behulp van (28) krijgt men dus

$$(30) \quad \begin{cases} {}_p\phi_q(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; \lambda \zeta) = \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} {}_1\phi_0(-r; \lambda) \prod_{j=1}^p (\alpha_j)_r \cdot (-\zeta)^r \times \\ \times {}_p\phi_q(\alpha_1+r, \dots, \alpha_p+r; \beta_1+r, \dots, \beta_q+r; \zeta) \end{cases}$$

en dit is (G) met $k = l = 0$. Bij het bewijs van deze betrekking maakten wij de aanname $\zeta \neq 0$. De formule geldt echter ook voor $\zeta = 0$, daar beide leden dan wegens (18) gelijk zijn aan

$$\frac{1}{\Gamma(\beta_1) \dots \Gamma(\beta_q)}.$$

Nu hebben wij (30) bewezen onder de aanname $p < q+1$. Het bijzondere geval met $k = l = 0$ van het ondergeval Ia is dus hiermee afgehandeld.

Is $p \geq 1$ en één van de getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan is ${}_p\phi_q(z)$ een veelterm in z ; de Taylorreeks (29) breekt dan af en geldt voor alle waarden van z , onverschillig welke waarden p en q hebben ($p \geq 1$). De substitutie $z = \lambda \zeta$ voert (29) in (30) over. Wij krijgen dus het bijzondere geval met $k = l = 0$ van het hoofdgeval III.

Is $p = q+1$ en geen van de getallen $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan is ${}_p\phi_q(z)$ analytisch in het z -vlak, waarin een coupure is aangebracht van $z = 1$ naar $z = 1 + \infty i$ of van $z = 1$ naar $z = 1 - \infty i$.

Is ζ een willekeurig getal $\neq 1$, dan breng ik de coupure aan naar $1 + \infty i$ als $\Im(\zeta) \leq 0$ en naar $1 - \infty i$ als $\Im(\zeta) \geq 0$. De functie ${}_p\phi_q(z)$ is dan analytisch binnen de cirkel met ζ als middelpunt, die door 1 gaat. De straal van deze cirkel heeft de lengte $|\zeta - 1|$. Binnen deze cirkel kan ${}_p\phi_q(z)$ nu worden ontwikkeld in de Taylorreeks (29); dit betekent,

dat (29) nu geldt voor $|z-\xi| < |\xi-1|$. De substitutie $z = \lambda\xi$ levert nu, dat (30) geldt onder de voorwaarden

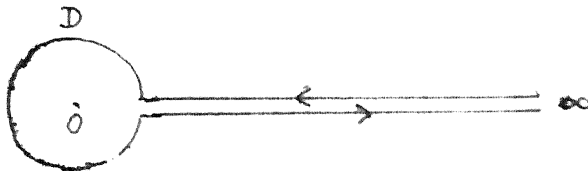
$$\xi \neq 1, \quad \left| \frac{(\lambda-1)\xi}{\xi-1} \right| < 1.$$

Hiermee hebben wij het ondergeval Id bewezen, zodat de gevallen met $k = 1 = 0$ nu alle behandeld zijn.

Wij zullen nu met behulp van het principe van volledige inductie de gevallen met $k = 0, 1 = 1, 2, 3, \dots$ van formule (G) bewijzen. Wij maken bij dit bewijs gebruik van de formule

$$(31) \begin{cases} \int_D e^{-u} {}_s\phi_t(a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_t; -\frac{z}{u}) (-u)^{-\nu} du \\ = -2\pi i {}_{s+1}\phi_t(a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_t, \nu; z); \end{cases}$$

Hierin heeft de integratieweg D de volgende gedaante (het punt $u = 0$ is het middelpunt van het cirkelvormige deel van D)



Deze formule geldt als de volgende voorwaarden vervuld zijn: Is geen van de getallen $a_1, \dots, a_s$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan geldt (31) voor $t \geq 0, 0 \leq s \leq t+1$; is $s = t+1$, dan moeten wij aannemen, dat de straal van het cirkelvormige deel van D groter is dan $|z|$; deze straal is een willekeurig positief getal als $s \leq t$. Als één van de getallen $a_1, \dots, a_s$ gelijk is aan $0, -1, -2, \dots$, dan geldt (31) voor $s \geq 0, t \geq 0$; de straal van het cirkelvormige deel van D is in dit geval een willekeurig positief getal.

Om (31) te bewijzen ontwikkelen wij de functie ${}_s\phi_t(-\frac{z}{u})$ met behulp van (11) en integreren termsgewijs; de integralen, die bij deze termsgewijze integratie optreden, berekenen wij met behulp van

$$\int_D e^{-u} (-u)^{-\mu} du = -\frac{2\pi i}{\Gamma(\mu)}.$$

De gevallen met $k = 0, 1 = 1, 2, 3, \dots$ in formule (G) zijn bijzondere gevallen van de ondergevalen Ia en Ic en van het hoofdgeval III. Het ondergeval Ia met $k = 1 = 0$ is reeds afgehandeld. Om nu ook het ondergeval Ia met $k = 0$ en $1 = 1, 2, 3, \dots$ te bewijzen neem ik aan, dat

(G) met $p < q+1$, $k = 0$ en $l = n$ ($n \geq 0$) reeds bewezen is en zal aantonen dat (G) met $p < q+1$, $k = 0$ en $l = n+1$ dan ook waar is. In (G) met $p < q+1$, $k = 0$ en $l = n$ vervang ik λ door $-\frac{\lambda}{u}$ en vermenigvuldig daarna aan weerskanten met $e^{-u}(-u)^{-\delta n+1}$. De betrekking, die er dan komt, integreren wij langs de integratieweg D (in het rechterlid termsgewijs); met behulp van (31) krijgen wij dan (G) met $p < q+1$, $k = 0$ en $l = n+1$.

Op volkomen dezelfde wijze behandelen wij de gevallen met $k = 0$, $l = 1, 2, 3, \dots$ van het hoofdgeval III.

Om de gevallen met $k = 0$, $l = 1, 2, 3, \dots$ van het ondergeval Ic te behandelen nemen wij als uitgangspunt formule (G) met $p = q+1$ en $k = l = 0$, dit is het reeds bewezen ondergeval Id. Laat ξ voldoen aan $\Re(\xi) < \frac{1}{2}$; deze voorwaarde is gelijkwaardig met $\left| \frac{\xi}{\xi-1} \right| < 1$. Laat λ een willekeurig getal zijn. Is de straal van het cirkelvormig deel van de integratieweg D voldoende groot, dan geldt voor ieder punt u van deze integratieweg

$$\left| \left(-\frac{\lambda}{u} - 1 \right) \left(\frac{\xi}{\xi-1} \right) \right| < 1.$$

Volgens het ondergeval Id mogen wij nu in (G) met $p = q+1$ en $k = l = 0$ het getal λ vervangen door $-\frac{\lambda}{u}$. Wij vermenigvuldigen de betrekking, die er dan komt, aan weerskanten met $e^{-u}(-u)^{-\delta l}$ en integreren langs D, wat geoorloofd is, als de straal D voldoende groot is. Wij krijgen dan (G) met $p = q+1$, $k = 0$ en $l = 1$ onder de voorwaarde $\Re(\xi) < \frac{1}{2}$. Hieruit kunnen wij met behulp van dezelfde integratiemethode (G) met $p = q+1$, $k = 0$ en $l = 2, 3, 4, \dots$ afleiden. Hiermee zijn de gevallen met $k = 0$, $l = 1, 2, 3, \dots$ van het ondergeval Ic bewezen.

Met behulp van een volledig inductieproces kunnen wij nu ook de gevallen met $k = 1, 2, 3, \dots$ van formule (G) bewijzen. Wij maken hierbij gebruik van de beide betrekkingen

$$(32) \begin{cases} \int_D e^{-u} s! t! (a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_t; zu) (-u)^{\nu-1} du = \\ = -\frac{2\pi i}{\Gamma(1-\nu)} s+1! t! (a_1, \dots, a_s, \nu; b_1, \dots, b_t; z) \end{cases}$$

en

$$(33) \begin{cases} \int_0^\infty e^{-u} s! t! (a_1, \dots, a_s; b_1, \dots, b_t; zu) u^{\nu-1} du = \\ = \Gamma(\nu) s+1! t! (a_1, \dots, a_s, \nu; b_1, \dots, b_t; z). \end{cases}$$

Deze betrekkingen zijn geldig als de volgende voorwaarden vervuld zijn: Is geen van de getallen $a_1, \dots, a_s$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan geldt formule (32) voor $0 \leq s \leq t$ en formule (33) voor $0 \leq s \leq t$ en $\Re(\nu) > 0$;

is $s = t$, dan moeten wij in (32) en in (33) bovendien nog aannemen, dat $\mathcal{R}(z) < 1$ is. De straal van het cirkelvormige deel van de integratieweg D is in (32) een willekeurig positief getal. Is één van de getallen $a_1, \dots, a_s$ gelijk aan 0 of een negatief geheel getal, dan gelden (32) en (33) voor $s \geq 0$, $t \geq 0$; de voorwaarde $\mathcal{R}(z) < 1$ als $s = t$ is in dit geval overbodig (in (33) moeten wij de voorwaarde $\mathcal{R}(v) > 0$ handhaven).

Om (32) en (33) te bewijzen, constateren wij eerst, dat uit het gedrag van de functie $\phi_t(z)$ voor grote waarden van $|z|$ volgt, dat de integralen (32) en (33) voor alle waarden van z convergent zijn, indien $s < t$; als $s = t$, dan convergeren de integralen als $\mathcal{R}(z) < 1$. Het bewijs gaat nu door ontwikkeling van de functie $\phi_t(z)$ en termsgewijze integratie (als $s = t$ is deze termsgewijze integratie zeker geoorloofd voor $|z| < 1$; voor $\mathcal{R}(z) < 1$ maken wij gebruik van de theorie der analytische voortzetting). Als één van de getallen $a_1, \dots, a_s$ gelijk is aan 0, -1, -2, ... , dan behoeven wij natuurlijk geen andere restricties op te leggen aan z , s en t dan $s \geq 0$, $t \geq 0$.

Om de bijzondere gevallen met $k = 1, 2, 3, \dots$ van het ondergeval Ia en de beide ondergevallen Ib en IIa te bewijzen nemen wij het reeds bewezen bijzondere geval met $k = 0$ van het ondergeval Ia als uitgangspunt van een volledige inductieredenering. Wij zullen nu aannemen, dat formule (G) met $p < q+1$ en $k = m$ ($m \geq 0$ en $p+m < q+1+1$) reeds bewezen is, en aantonen, dat (G) met $p < q+1$ en $k = m+1$ dan ook waar is. Wij zullen eerst onderstellen

$$(34) \quad \gamma_{m+1} \neq 1, 2, 3, \dots$$

In formule (G) met $p < q+1$ en $k = m$ vervangen wij λ door λu en vermenigvuldigen daarna met $e^{-u}(-u)^{-1+\gamma_{m+1}}$. De betrekking, die er dan komt, integreren wij langs D (in het rechterlid termsgewijs) met behulp van (32). De betrekking, die dan ontstaat, mogen wij wegens (34) delen door

$$= \frac{2\pi i}{\Gamma(1-\gamma_{m+1})} \cdot$$

Het resultaat wordt (G) met $p < q+1$ en $k = m+1$. Wij hebben hierbij de onderstelling (34) gemaakt. Om deze onderstelling kwijt te raken, beschouwen wij nog afzonderlijk het geval, dat $\mathcal{R}(\gamma_{m+1}) > 0$ is. Wij vervangen weer λ door λu , maar in plaats van met

$e^{-u}(-u)^{-1+\gamma_{m+1}}$ vermenigvuldigen wij met $e^{-u}u^{-1+\gamma_{m+1}}$.

Wij integreren nu met behulp van (33) van 0 naar ∞ . Na delen door $\Gamma(\gamma_{m+1})$ vinden wij weer (G) met $p < q+1$ en $k = m+1$.

Bij ons integratieproces hebben wij in het rechterlid termsgewijs geïntegreerd. Is geen van de getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan kan men uit het gedrag van de algemene term van de reeks in het rechterlid van (G) voor grote waarden van r afleiden, dat deze termgewijze integratie geoorloofd is voor alle waarden van λ en ζ indien $p+m+1 < q+1+1$; is echter $p+m+1 = q+1+1$, dan is de termgewijze integratie alleen geoorloofd als $|\lambda\zeta| < 1$. Hiermee zijn de ondergevallen Ia en Ib volledig afgehandeld.

Is één van de getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan blijkt ook voor $p+m+1 = q+1+1$ de termgewijze integratie geoorloofd voor alle waarden van λ en ζ en bovendien blijkt het, dat het in dit geval zelfs mogelijk is met behulp van dezelfde methode het aantal parameters γ nog met een willekeurig aantal te verhogen, en wel zonder restricties aan λ en ζ op te leggen. De voorwaarde $p+k \leq q+1+1$ valt in dit geval dus geheel weg, zodat wij het ondergeval IIa krijgen.

Wij bewijzen nu de bijzondere gevallen met $k = 1, 2, 3, \dots$, van het ondergeval Ic en de beide ondergevallen Ie en IIb. Het reeds bewezen bijzondere geval met $k = 0$, $l > 0$ van het ondergeval Ic dient hierbij als uitgangspunt. Wij onderstellen thans, dat (G) met $p = q+1$, $l = 0$ en $k = m$ ($0 \leq m < 1$) reeds is bewezen onder de voorwaarde $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$ en bewijzen dan, dat (G) met $p = q+1$, $l > 0$ en $k = m+1$ ook waar is. Dit bewijs gaat met behulp van dezelfde integratiemethode als zo pas. Is geen van de getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan blijkt de toegepaste termgewijze integratie geoorloofd te zijn voor $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$ en alle waarden van λ mits $m+1 < 1$. Hiermee is het ondergeval Ic afgehandeld. Is $m+1 = 1$, dan blijkt de termgewijze integratie geoorloofd indien $|\zeta| < \frac{1}{4}$ en $|\lambda| < 1$. Uit het gedrag van de algemene term van de reeks in het rechterlid van (G) volgt echter, dat (G) met $p = q+1$ en $k = l > 0$ een analytische functie is van ζ en λ , mits ζ en λ voldoen aan de voorwaarden $\Re(\zeta) < \frac{1}{2}$, $\left| \frac{(\lambda-1)\zeta}{\zeta-1} \right| < 1$. De voorwaarden $|\zeta| < \frac{1}{4}$, $|\lambda| < 1$ kunnen dus met behulp van het beginsel der analytische voortzetting door deze ruimere voorwaarden worden vervangen, zodat ook het gehele ondergeval Ie bewezen is.

Is één van de getallen $\gamma_1, \dots, \gamma_{m+1}$ gelijk aan $0, -1, -2, \dots$, dan blijkt ook voor $m+1 = 1$ de termgewijze integratie geoorloofd voor

$\mathcal{R}(\xi) < \frac{1}{2}$ en alle waarden van λ en bovendien blijkt het, dat wij in dit geval het aantal parameters γ willekeurig groot kunnen maken, mits wij aannemen, dat $\mathcal{R}(\xi) < \frac{1}{2}$. Wij krijgen dus het ondergeval IIb, maar niet het volledige ondergeval IIb, alleen het bijzondere geval met $l > 0$, daar wij zijn uitgegaan van het bijzondere geval met $k = 0, l > 0$ van het ondergeval Ic. Om ook het geval van IIb met $k = d$ ($d > 0$) en $l = 0$ te bewijzen, nemen wij van IIb het bewezen geval met $k = d+1$ en $l = 1$ en stellen dan nog in formule (G) $\delta_1 = \gamma_{d+1}$. Wij krijgen dan (G) met $k = d$ en $l = 0$ volgens (19). Hiermee is het ondergeval IIb volledig afgehandeld.

Het bijzondere geval met $k > 0$ van het hoofdgeval III kan worden afgeleid uit het geval met $k = 0$ van hetzelfde hoofdgeval. Met behulp van onze integratiemethode kunnen wij een willekeurig aantal parameters toevoegen. Daar één van de getallen α gelijk is aan $0, -1, -2, \dots$, staat in het linkerlid van (G) een veelterm in $\lambda \xi$ en in het rechterlid staat wegens (2) een eindige som, zodat de termsgewijze integratie geoorloofd is zonder dat een voorwaarde behoeft te worden opgelegd.
